Enseigner le calcul mental

Cycle 3

Dans les programmes

- **Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux**
- **Mémoriser des faits numériques** et **des procédures élémentaires de calcul**.
  Addition, soustraction, multiplication, division.
- **Élaborer ou choisir des stratégies de calcul** à l'oral et à l'écrit.
- **Vérifier la vraisemblance d'un résultat**, notamment en estimant son ordre de grandeur.
- **Propriétés des opérations** :5×12 = 5×10 + 52.
- Faits et procédures numériques additifs et multiplicatifs.
- Multiples et diviseurs des nombres d'usage courant.
- Critères de divisibilité (2, 3, 4, 5, 9, 10).
- **Calcul mental** : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.
- **Calcul en ligne** : utiliser des parenthèses dans des situations très simples.
- **Calcul posé** : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.
- **Calcul instrumenté** : utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.
  Fonctions de base d'une calculatrice.

Déroulement de la formation

Temps 1 : 08/01/2019	Temps 2 : en autonomie	Temps 3 : 13/03/2019
Enseigner le calcul mental : généralités.	Enseigner des procédures (à choisir) Choisir les compétences pour le rallye maths Tester un jeu fabriqué ou acheté et qui sera présenté au temps 3	Compétences rallye maths Les jeux mathématiques (plateaux, logiciels, fabrication pers.) Calculs en ligne (parenthèses) et calculs instrumentés

Objectifs du temps 1

Partager un vocabulaire commun.

Identifier les enjeux du calcul mental et les méthodes.

Organiser des séances et séquence de calcul mental.

Démarche et outils pour la classe : concevoir son enseignement.

Partager sa pratique et s'approprier des ressources.

Affirmations Vrai ou Faux à votre avis ?

1. Le calcul mental s'appuie uniquement sur la mémoire.

2. Lors de séances de calcul mental, seul le résultat peut être écrit.

3. Le calcul mental, permet de travailler les propriétés des opérations.

4. Le calcul mental permet de préparer la résolution de problèmes.

5. La répétition fréquente des tables suffit à en assurer la mémorisation.

6. Les compétences de calcul mental se préparent dès les premières années de maternelle.

7. Il faut imposer aux élèves des procédures de calcul réfléchi.

Le calcul mental

Une définition

On parle de calcul mental lorsqu'il n'y a pas de traitement écrit du calcul en lui-même.
On pourra tout de même avoir une trace écrite de l'énoncé, de la réponse, et éventuellement des résultats intermédiaires afin de soulager la part à mémoriser.

Dans la vie quotidienne…quelques exemples

Fonction sociale

Rendre la monnaie (complément à…)

Les proportions dans une recette (proportionnalité)

Calcul du prix après réduction (pourcentages)

Vérifier un ticket de caisse (calcul approché)

Mais aussi la quantité de matériaux (surfaces – longueurs), estimer une durée de trajet….

Fonction scolaire

Structuration arithmétique des nombres

Relation additives et multiplicatives

doubles – moitiés - décomposition

Enraciner le sens des opérations

Compréhension des liens entre les opérations

Savoir que 26+14 = 40 amène au résultat de 40-26 ou 40-14

Aide à la résolution de problèmes

Ramener le problème à un champ numérique familier

Essayer avec des nombres plus petits - intuition

Première compréhension des propriétés des opérations

Commutativité - associativité - distributivité

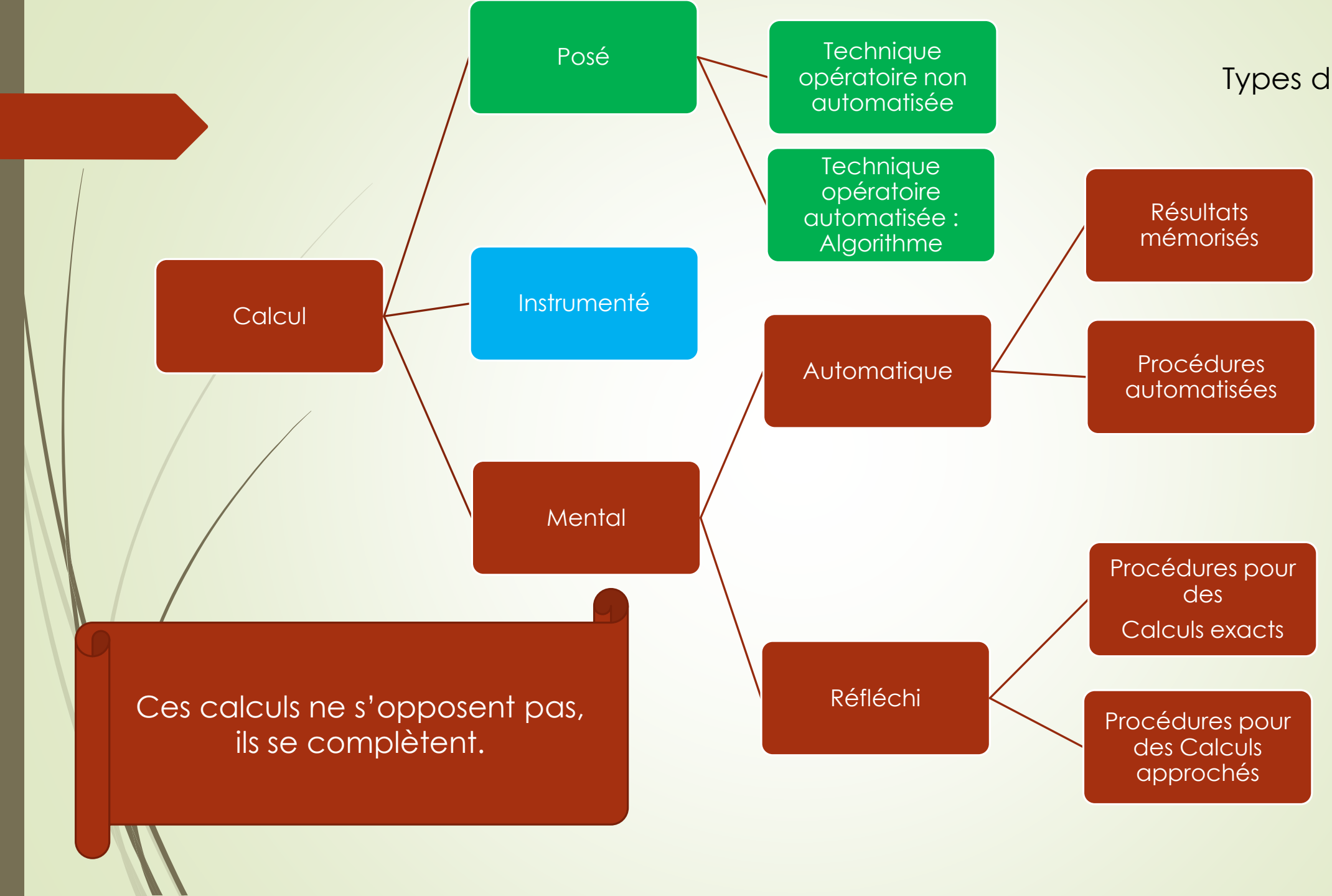
8x7 = (8x5) + (8x2)

Pas de calcul posé sans calcul mental

La disponibilité des tables = accès facilités aux techniques opératoires

Travailler le calcul mental c'est développer des stratégies et employer des procédures de calculs ADAPTES aux nombres en présence.

Types de calculs.



Le vocabulaire

Calcul mental : pas de traitement écrit du calcul lui-même, même si le résultat peut être écrit (l'énoncé parfois aussi).

Calcul posé : usage d'une technique opératoire.

Calcul en ligne : écrits (partiels) des calculs intermédiaires. Etape vers le calcul mental. Repose sur la compréhension du nombre, du principe de numération décimale et des propriétés des opérations.

Calcul réfléchi : élaborer une procédure adaptée en fonction des opérations et des nombres. Fait appel au raisonnement, à des procédures automatisées ou non.

Calcul automatisé : réponse à «a x b» ou «a + b (les tables) restitution la plus directe possible. Pour les tables on parle de faits mémorisés.

Calcul rapide : critère de performance pour la restitution des tables, pas une forme de calcul.

Testons nos limites

6 + 4	6 - 1	7 x 8	10 : 2
12 + 18	19 - 7	15 x 10	100 : 4
250 + 650	100 - 45	7 x 15	63 : 7
127 + 190	37 - 22	6 x 17	17200 : 100
326 + 544	860 - 515	24 x 24	105 : 5
774 + 689	774 - 389	39 x 102	972 : 27

Noter à partir de quel calcul de chaque série, vous êtes passé d'une procédure automatisée (résultats mémorisés, procédures automatiques) à un calcul réfléchi (procédures personnelles).

On remarquera que notre aisance calculatoire est fortement corrélée à des connaissances d'automatismes riches

ORAL OU ECRIT ?

Le calcul réfléchi (nécessitant l'élaboration et l'utilisation de procédures intermédiaires pour obtenir le résultat) peut faire intervenir l'écrit car les élèves peuvent avoir besoin de garder une trace écrite des étapes du calcul.

Passer par l'écrit permet
- D'expliciter les procédures
- De suivre l'évolution de la mémorisation

Il faut éviter la saturation de la mémoire de travail en autorisant les élèves à noter les résultats intermédiaires.

Le calcul mental

3 compétences à développer pour améliorer ses capacités.

- Mémoriser des résultats
- Développer une habilité à décomposer les nombres
- Les propriétés des opérations

Enseigner le calcul mental

Enseigner des faits numériques	Enseigner les procédures	Enseigner le calcul approché
Travailler la mémorisation et la connaissance des tables.	La décomposition des nombres et s'appuyer sur les propriétés des opérations	Les valeurs approchées

Entraîner la mémoire visuelle et auditive

100 000

34

4820

908

ಽಽ ಽಽ

ಽಽ ಽಽ

La mémoire auditive

¿¿ ¿¿

¿¿

Noter 3 nombres !

Mémoriser et traiter : écrire dans l'ordre croissant

99,8

100,1

99,09

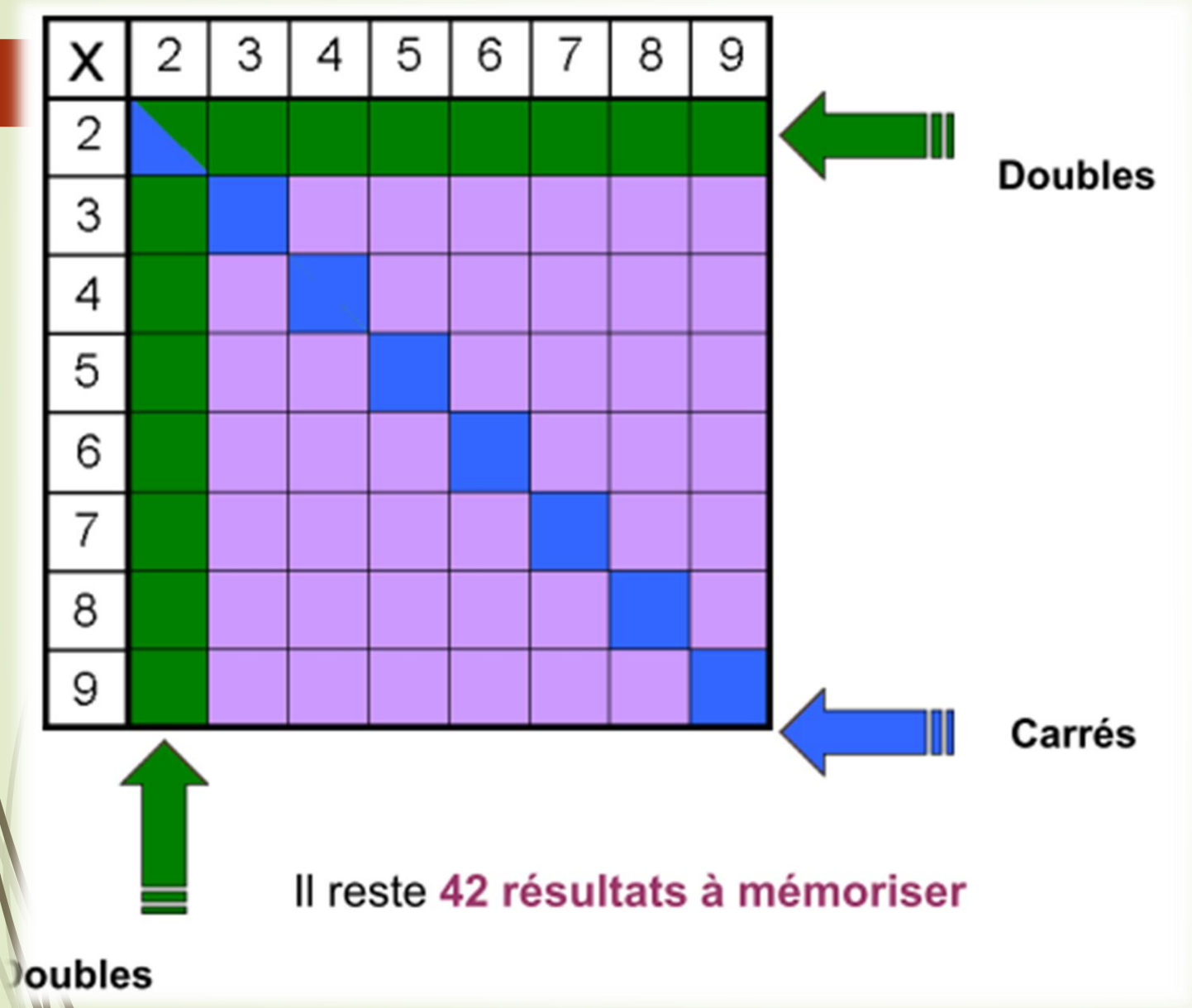
Mémoriser et calculer : multiplier par 100

208

723,6

0,65

Enseigner les tables : structuration et entraînement.



Connaître les résultats particuliers

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Connaître la commutativité, c'est 50% de résultats en moins à mémoriser.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	4								
3	3	6	9							
4	4	8	12	16						
5	5	10	15	20	25					
6	6	12	18	24	30	36				
7	7	14	21	28	35	42	49			
8	8	16	24	32	40	48	56	64		
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Les tables de 2 et 5 sont les plus simples. La table de 2, ce sont les doubles, ils sont mémorisés avant même d'être traduits sous forme multiplicative (exigence fin Cycle 2).

Les tables de 4 et 8 sont ensuite bien placées, car on peut dire que la table de 4 est le double de la table de 2, et celle de 8 le double de la table de 4. On a ainsi une séquence des tables de 2, 4 et 8.

Ensuite, **la table de 9** peut être facilitée par un certain nombre de remarques du type : « Le chiffre des dizaines avance toujours de 1, alors que le chiffre des unités recule toujours de 1. Ex : 18, 27, 36…. » Autre remarque : « Quand je dis 3 x 9 : le résultat pour les dizaines c'est 3 moins 1, et pour les unités c'est le complément à 9. 27 deux sept. Et il y a la technique des doigts.

Après, apprendre **les tables de 3 et 6** qui forment un ensemble car 6 est le double de 3.

Et la table de 7 alors ? Et bien c'est fini, il n'y a plus rien à apprendre. Il ne reste plus que 7 x 7. C'est un carré qui est assez bien mémorisé.

Dans un tableau sous pochette plastique, l'élève efface les résultats mémorisés et ne conserve que les résultats non mémorisés.

X	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6						42	48	
7					42		56	
8					48	56		72
9							72	

Interroger sur les tables : à l'écrit (pas de lecture de l'enseignant).

- 6 x 7 = ? 7 x 6 = ?
- ? X 6 = 42 7 x ? = 42
- 42 : 6 = ? 42 : 7 = ?
- ? X ? = 42
- QCM : 6 x 7 = 56 ? 13? 42?
- Vrai / Faux : 6 x 7 = 49 (V) (F)
- Suite croissante et décroissante de 6 en 6

Interroger sur les tables : à l'oral (pas de support écrit).

- « 6 x 7 » « 7 x 6 »
- « Quel est le produit de 6 par 7 ?»
- « Dans 42 combien de fois 6 »
- « 42 divisé par 7 » « Quel est le quotient de 42 par 6 ?
- « Elliot doit courir 4200 mètres. Chaque tour de terrain mesure 700m. Combien de tours doit-il effectuer ? »

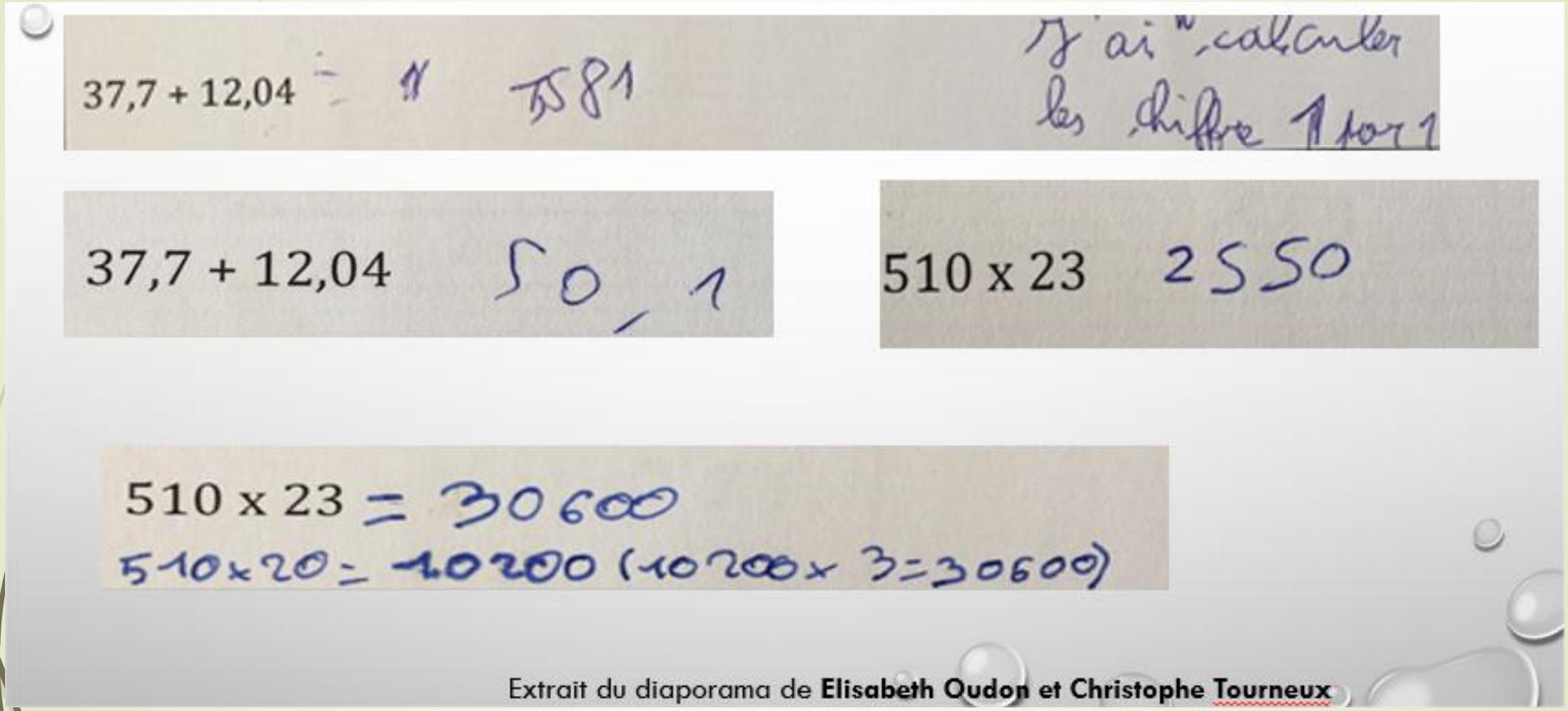
Astuces ou pas d'astuces ?

Dans la mesure où les tables font partie des faits numériques qui doivent absolument être mémorisés, l'utilisation d'astuces peut accélérer cet apprentissage. On sera prudent pour les autres formes de calculs (par exemple x10 je mets zéro derrière).

<u>Astuces pour les tables :</u>

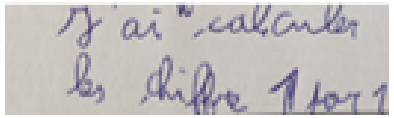
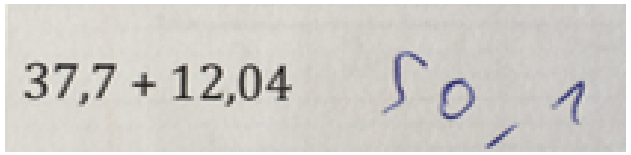
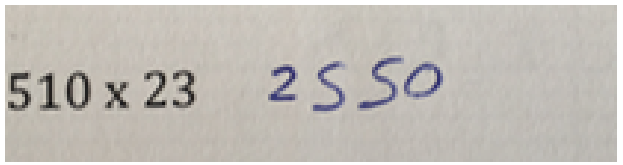
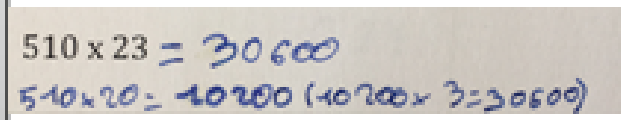
La table de 9 sur les doigts
Les calculs où les deux termes sont entre 6 et 10
La table de 5 avec les chiffres pairs ou impairs.

ANALYSE D'ERREURS



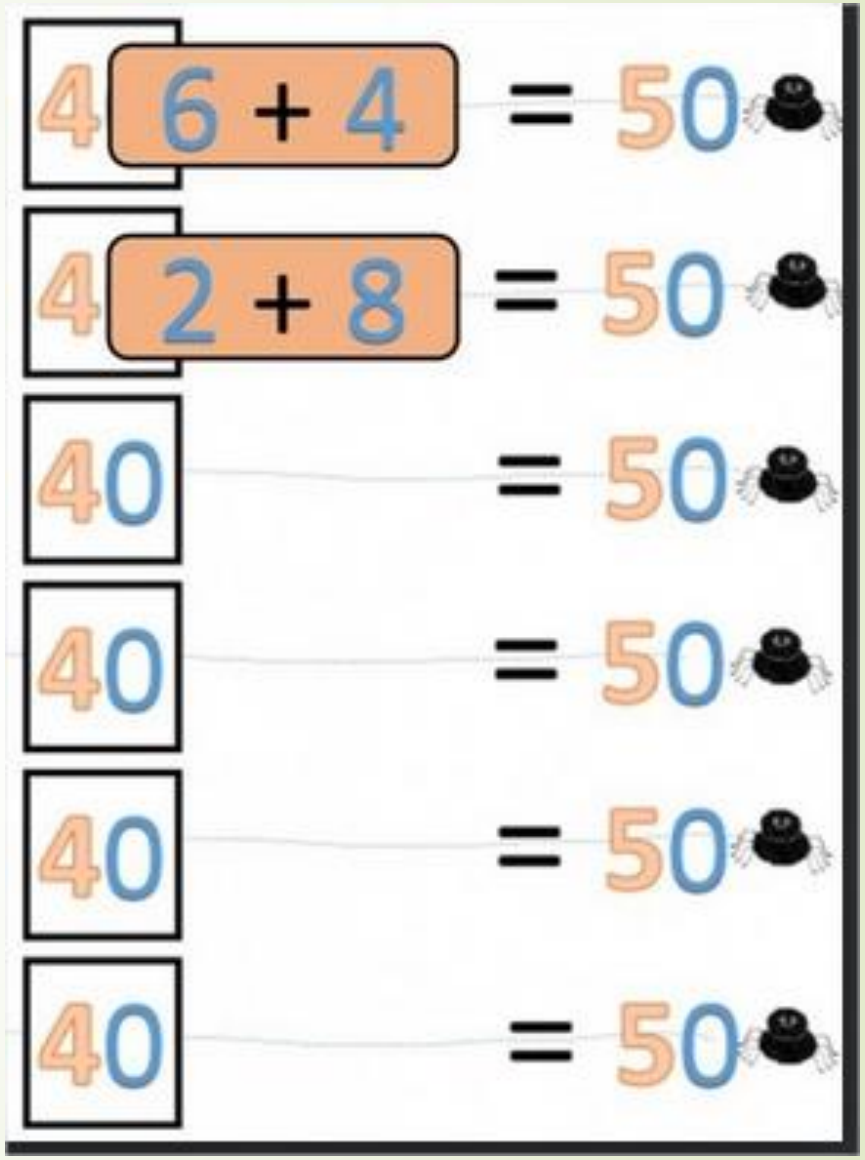
Extrait du diaporama de **Elisabeth Oudon et Christophe Tourneux**

ANALYSE D'ERREURS

  	Procédure probable : 4 et 7, ça fait 11, j'écris 1 et je retiens 1 0 et 7 et la retenue, ça fait 8 2 et 3, ça fait 5 et il reste le 1, 3 chiffres après la virgule	L'élève applique l'algorithme posé de l'addition sans prendre en compte la valeur des chiffes, puis place la virgule en utilisant pour cela la technique de la multiplication ; la numération de position n'a pas de sens pour lui ; les techniques sont appliquées sans être comprises
	Procédure probable : 7 + 4 égal 11, J'écris 1 et je retiens 1 37 +12 + 1 = 50 Résultat : 50,1	L'élève effectue 37,7 + 12,4 Il ne maitrise pas la numération de position
	Procédure probable : 510 × 2 = 1020 510 × 3 = 1530 1020 + 1530 = 2550	23 est vu comme 2 + 3, l'élève utilise ensuite la distributivité
	Procédure : 510 × 20 × 3	23 est considéré comme 20 × 3 ; l'élève utilise ensuite l'associativité de la multiplication

Extrait du diaporama de **Elisabeth Oudon et Christophe Tourneux**

Enseigner les procédures : découvrir, construire, entraîner et automatiser



Travailler les décompositions

14 x 35

Effectuer ce calcul mentalement, vous avez le droit de noter des résultats intermédiaires puis expliquez votre procédure à votre groupe.
Combien de procédures différentes ?

Les procédures de l'addition

45 + 17

Faites ce calcul et notez la procédure effectuée.

Les procédures de l'addition

45 + 17 = 45 + 10 + 7 = 55 + 7 = 62 **A**	45 + 17 = 45 + 5 + 12 = 50 + 12 = 62 **B**
45 + 17 = 40 + 5 + 10 + 7 = 50 + 12 = 62 **C**	45 + 17 = 45 + 15 + 2 = 60 + 2 = 62 **D**
45 + 17 = 45 + 20 – 3 65 – 3 = 62 **E**	45 + 17 = 2 + 43 + 17 = 2 + 60 = 62 **F**

Enseigner les procédures

Décomposition du 2nd nombre

A: 45 + 17 = 45 + (10 + 7) = 55 + 7 = 62
D : 45 + 17 = 45 + (15 + 2) = 60 + 2 = 62

Décomposition du 1er nombre

F : 45 + 17 = (2 + 43) + 17 = 2 + 60 = 62

Passage à la dizaine supérieur

B: 45 + 17 = 45 + 5 + 12 = 50 +12

Enseigner les procédures

Décomposition des 2 nombres

C : 45 + 17 = (40 + 5) + (10 + 7) = 50 +12 = 62

Ajout de dizaines et soustractions (pivotement)

E : 45 + 17 = 45 (+20 – 3) = 65 -3 = 62

Enseigner les procédures

- Une semaine sur la procédure 1

Ajout de dizaines et soustraction

- Une semaine sur la procédure 2

Passage à la dizaine supérieure

- Une semaine sur la procédure 3

Décomposition du 2nd nombre

ADAPTATION

- Une semaine où l'élève a le choix de l'utilisation …

Importance du choix de la procédure

Quel procédure pour :

26 + 16 ; 35 + 17 ; 37 + 18 ; 59 + 24 ; 58 + 26 ; 45 + 37

Niveau expert ?

37 x 8

- 37 x **2 x 2 x 2**

(on double trois fois de suite)

- 30 x 8 + 7 x 8

37 + 8

- 37 + **3 + 5**
- 30 + 7 + 8

25 x 12

- 25 x **4 x 3**
- 25 x 10 + 25 x 2

50 x 12

- 50 x **2 x 6**
- 50 x 10 + 50 x 2

Etre expert,
c'est CHOISIR une procédure personnelle !

- c'est être capable **de <u>choisir parmi les procédures apprises</u>**
  - celle qui est la plus adaptée aux singularités, à la « personnalité » des nombres en présence
  - celle qui est la plus adaptée aux performances acquises à un moment de sa scolarité

…c'est une initiative, un choix !

Les procédures de la soustraction

31 - 18

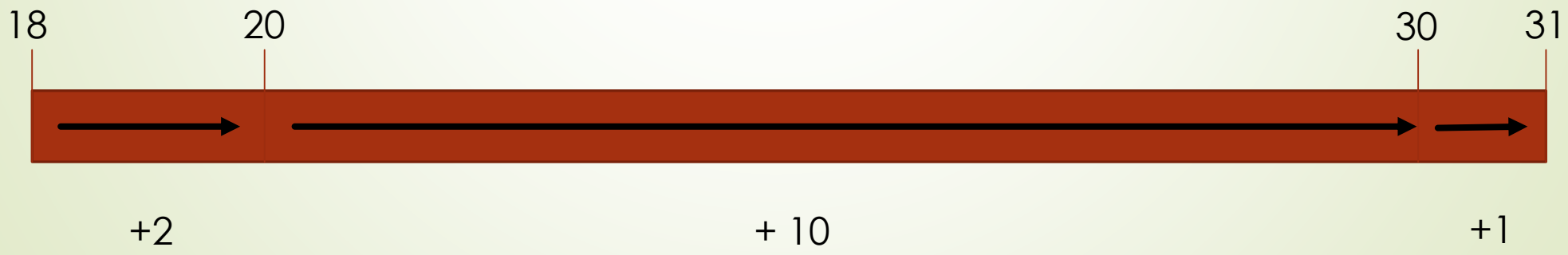
Faites ce calcul et notez la procédure effectuée.

Les procédures de la soustraction

Décomposition et jalonnement : calcul de l'écart en avançant par bond et en passant par des nombres ronds.

31 – 18 : pour aller à 31 en partant de 18

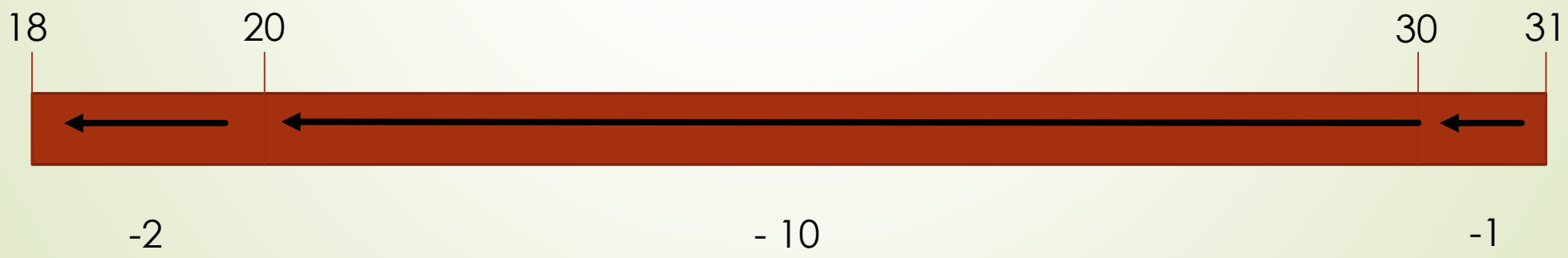
De 18 à 20, de 20 à 30 et de 30 à 31 -> 2 + 10 + 1



Les procédures de la soustraction

Décomposition : calcul de l'écart en reculant par bond et en décomposant le second terme.

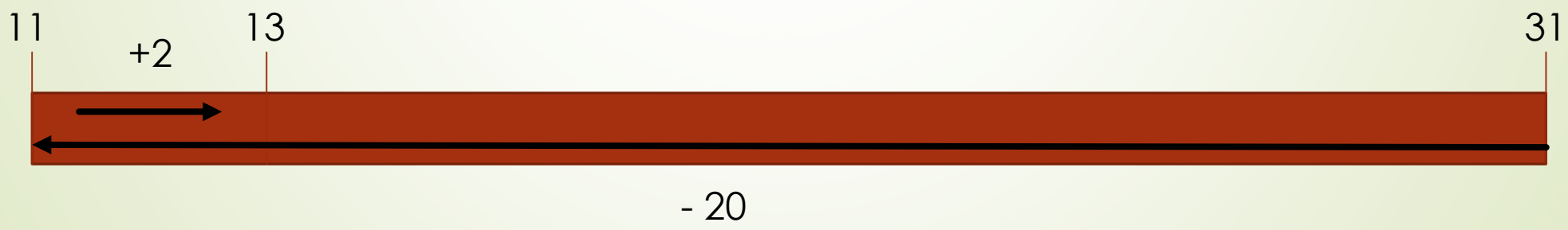
31 – 18 = 31 – 1 – 10 – 2



Les procédures de la soustraction

Pivotement : enlever trop et ajuster.

31 – 18 = 31 – 20 + 2



Les procédures de la soustraction

Décalage : c'est comme.

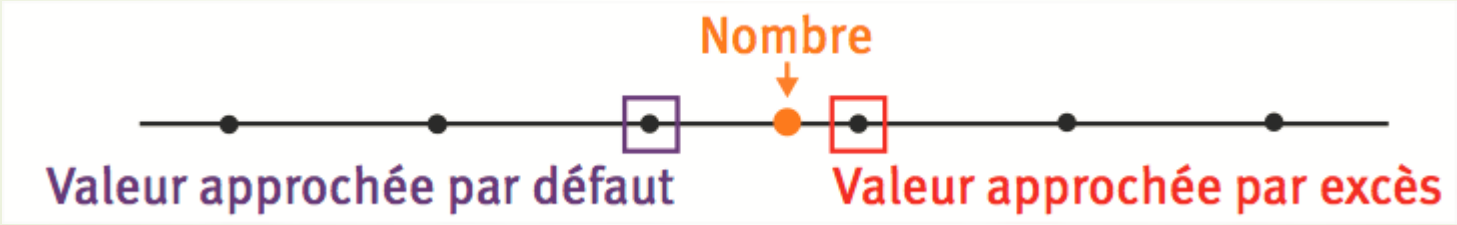
31 – 18 c'est comme 30 – 17 = 13

Un paradoxe : trop peu d'automatismes (procédures automatisées installées en mémoire) peuvent renforcer l'automatisme (recours quasi-systématique à un seul type de procédure).

Plus d'automatismes pour échapper à l'automatisme.

Exemple : 95 x 3 : 90 x3 + 5 x 3 ou 100 x 3 – 5 x 3 ?

Enseigner le calcul approché : encadrements et valeurs approchées



Calcul approché : quelques principes

Il faut avoir une bonne connaissance de la numération pour maîtriser les encadrements
On se focalise sur la dizaine ou centaine (supérieure ou inférieure)

Ex : 573 + 215 = ?

500 < 573 < 600	200 < 215 < 300	700 < ? < 800
570 < 573 < 580	210 < 215 < 220	780 < ? < 790

On traite séparément les deux nombres de départ, on peut aussi traiter qu'un seul nombre

Ex : 297 + 610 = ?
300 + 600 = 900

Ex : 4 x 42 = ?
4 x 40 = 160

Donner le résultat arrondi d'un calcul

Exemples:
$79 - 42 \approx 80 - 40 \approx 40$
$187 + 78 \approx 190 + 80 \approx 270$

Les nombres sont arrondis s'ils sont au maximum à 3 unités d'un nombre rond.

Déterminer l'ordre de grandeur du résultat

Exemples : donner le résultat le plus proche.

1004 - 123	1500	700	**900**
17 x 12	**200**	300	150
1,5 x 1,5	3	**2,2**	2
54 ÷ 0,1	0,5	**500**	5

Le calcul mental dans l'emploi du temps :

Des séances courtes de 15 minutes et au moins 1 séance longue de 30 minutes pour travailler les procédures

Matin ou après-midi ?

Associé ou dissocié de la séance de maths ?

Une séquence en 4 étapes

1. Apprentissage : séance longue (25 – 30 minutes)

Pour réinvestir les compétences apprises, dans des situations variées et bien choisies, et découvrir des procédures, interroger les relations entre les nombres, travailler des propriétés (exemple les procédures pour multiplier par 9).

Production d'un écrit pour expliciter les stratégies

Une séquence en 4 étapes

2. Appropriation : séance courte et massée (sur plusieurs jours qui se suivent) : 15 minutes

1 à 4 séances courtes qui portera sur une procédure. Varier la présentation des exercices (arbres à calculs, vrai/faux,). Penser à différencier les exercices et à varier les situations (dans un problème, en géométrie).

Une séquence en 4 étapes

3. Réinvestissement : séances courtes de façon filées et spiralaires, réactivation.

Mobiliser les connaissances dans d'autres contextes (problèmes), à d'autres moments que le temps habituels(temps libre sur logiciels, à la maison en devoirs, utilisation de jeux).

Une séquence en 4 étapes

4. Evaluation : en fonction des connaissances, varier les formes d'évaluation

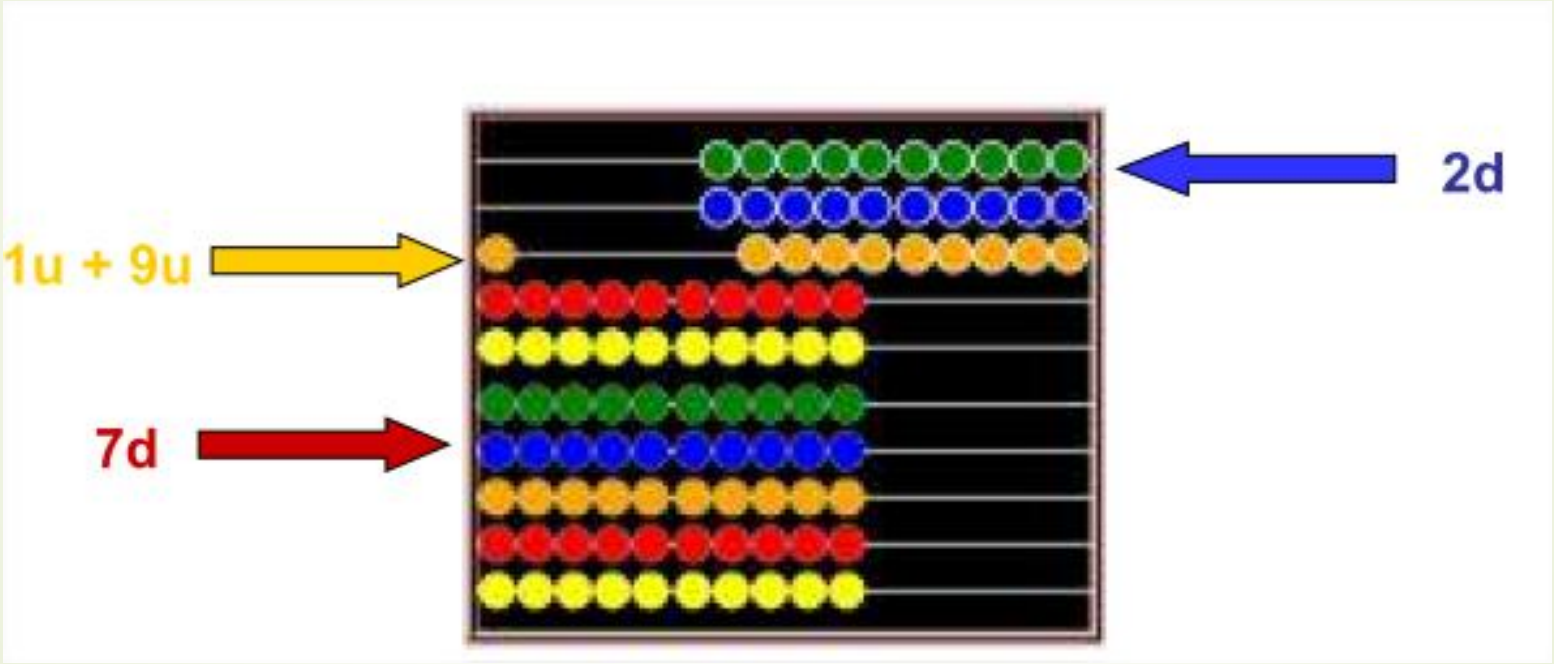
Choisir la procédure la mieux adaptée.
Reconnaître une procédure sur un exemple et la réinvestir.
Evaluer le niveau d'automatisation de la procédure en donnant un certain nombre de calculs à réaliser dans un temps défini.
Evaluer l'application d'une procédure dans un problème simple.

Extrait vidéo : une séance en CE2/CM1

- Repérer l'objectif de la séance
- Identifier à quelle(s) étapes(s) de la séquence en sont les élèves.
- Comment est gérée l'hétérogénéité des élèves?

Le matériel

Support de visualisation, le boulier à 100 boules



Le complément à 100 de 29 se lit directement sur le boulier : c'est 71.
On voit bien 9 lignes entières (2 en haut et 7 en bas)
et une ligne décomposée (1 à gauche et 9 à droite)

Des supports papiers

Jeu des carrés (à 100)

Labynombre

Nombres en cascade

Coloriages magiques….

Des activités ritualisées

Le nombre pensé

Avec trois chiffres

Le jeu des 6 cartes

Vous savez que…

Des sites

Le matou matheux

Calculatice

Primaths

Logicieleducatif.fr

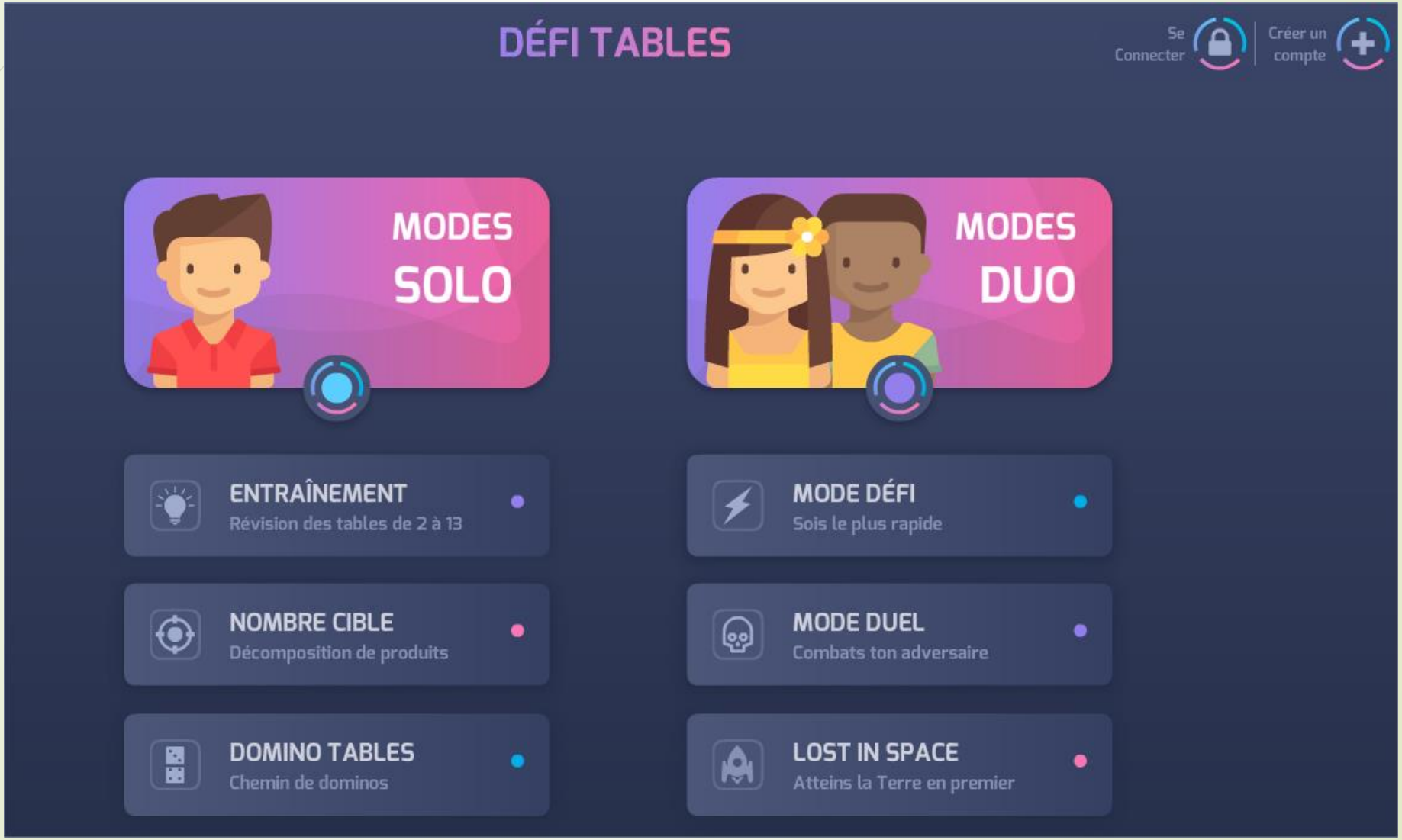
Voir fichier Activités au C3.

Des jeux…(temps 2 de la formation)

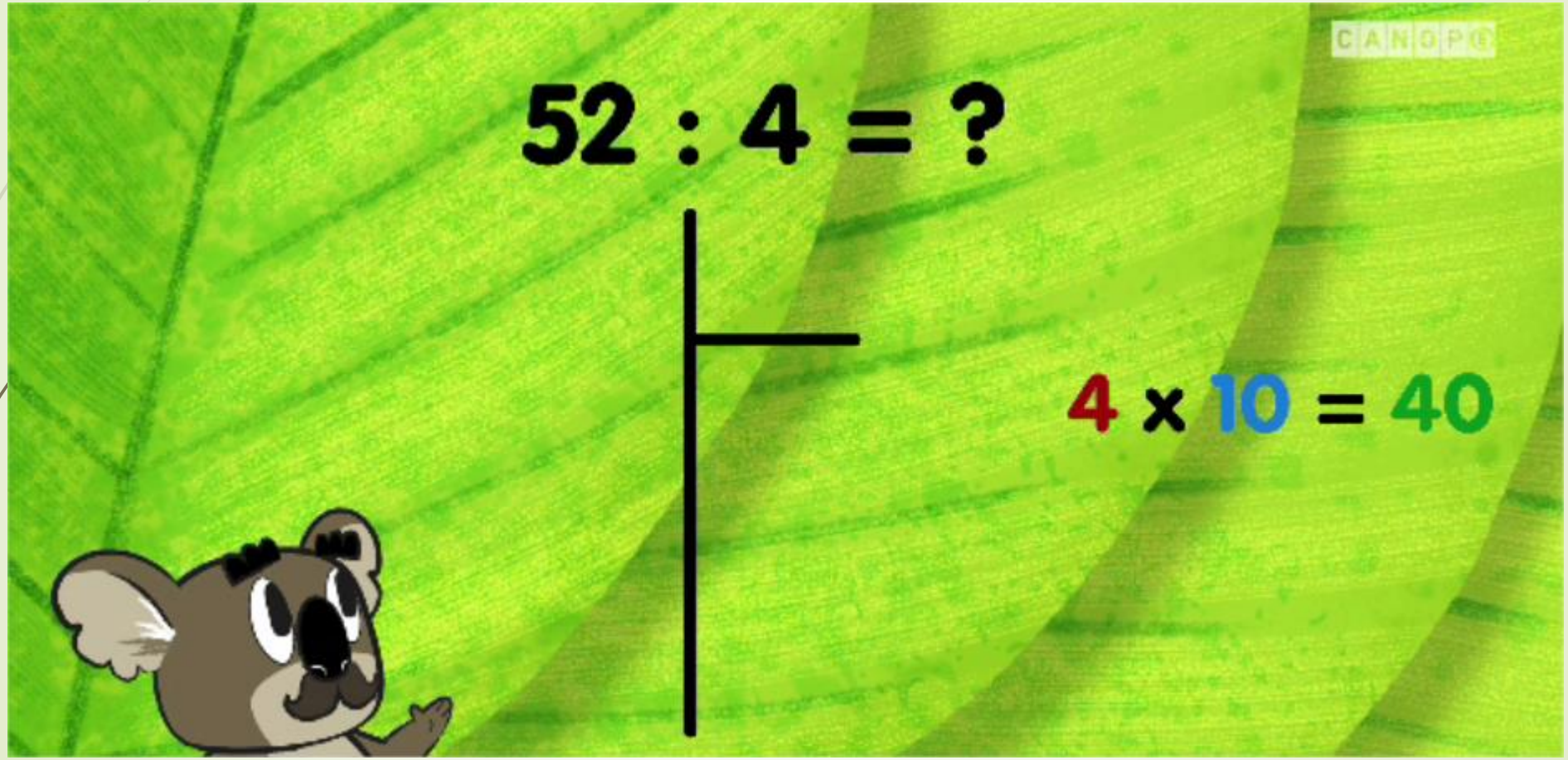
Ludique, calcul mental inversé souvent, pas de linéarité, mais parfois coûteux en temps pour la mise en place et l'apprentissage des règles.

MATHADOR

Des logiciels (1 exemple, cette partie sera développée au temps 2)



Des vidéos : les fondamentaux



S'inscrire à un dispositif : la course aux nombres

https://www.ac-strasbourg.fr/pedagogie/mathematiques/competitions/can/

SUJET CM2 - JUIN 2018

	ÉNONCÉ	RÉPONSE	JURY
1)	$58 + 9$		
2)	$300 - 101$		
3)	$8 + 8 + 8 + 8$		
4)	9×3		
5)	Complète.	$4 \times \ldots\ldots = 32$	
6)	Enlève une demi-heure à 1 h 10 min.		
7)	Le quart de 32		
8)	7 vis pèsent 15 g.	…… vis pèsent 30 g.	
9)	Complète.	0 … 1	
10)	$45 \div 3$		
11)	Écris autrement $\frac{204}{100}$.		
12)	Complète.	$3{,}5 = \frac{\ldots}{\ldots}$	

Programmer les apprentissages

J’automatise au cycle 3 :

•Maîtriser le répertoire additif (tables d’addition) : sommes de deux nombres entiers inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associés.
•Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines, des centaines, des milliers… ; calculer les compléments correspondants.
•Calculer, avec des nombres entiers, des sommes, des différences ou des compléments
•du type 200 + 70, 270 – 70, 200 pour aller à 270
•Ajouter ou soustraire un nombre entier (inférieur à 10) d’unités, de dizaines, de centaines, de milliers… à un nombre quelconque, dans des cas sans retenue et dans des cas avec retenue.
•Calculer les compléments d’un nombre entier à la dizaine supérieure.
•Calculer les compléments à 100 et à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont le chiffre des unités est 0.
•Connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou de multiples de 250 inférieurs à 1000.
•Calculer certaines sommes de deux nombres décimaux (avec un chiffre après la virgule), en particulier ajouter un entier et un décimal.
•Décomposer un nombre décimal en utilisant l’entier immédiatement inférieur.
•Calculer les compléments à l’unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule.
•Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux.

Programmer les apprentissages

J’automatise au cycle 3 :

•Maîtriser le répertoire multiplicatif (tables de multiplication) : produits de deux nombres inférieurs à 10, recherche d’un facteur, quotients et décompositions associés.

•Utiliser la connaissance des tables pour répondre à des questions du type «Combien de fois 8 dans 50 ?» ou «Diviser 50 par 8 ».

•Situer un nombre entre deux résultats d’une table de multiplication.

•Multiplier et diviser par 10, 100, 1 000… les nombres entiers.

•Calculer des produits du type 30×4, 400×8, 20×30 et les quotients correspondants.

•Connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères » : 100, 1 000 et 60 et leurs diviseurs.

•Multiplier et diviser par 10, 100… dans l’ensemble des nombres décimaux.

•Connaître les relations entre certains nombres décimaux, comme 0,25, 0,5, 0,75 et 1 ou 2,5, 5, 7,5 et 10.

Programmer les apprentissages

J’ai une procédure pour calculer au cycle 3 :

•Ajouter ou soustraire des nombres entiers ronds.

•Calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes «qui vont bien ensemble ».

•Calculer des sommes et différences de nombres entiers de deux chiffres (ou dont le calcul peut s’y ramener).

•Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples.

•Calculer le complément d’un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule au nombre entier immédiatement supérieur.

•Évaluer un ordre de grandeur en utilisant un calcul approché : sommes de deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux, différences de deux nombres entiers ou décimaux.

Programmer les apprentissages

J’ai une procédure pour calculer au cycle 3 :

•Calculer les doubles, moitiés des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers) ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple.

•Calculer les quadruples et quarts des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers) ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple.

•Multiplier et diviser par 5, par 20, par 50.

•Multiplier un nombre par des nombres comme 11, 12, 9, 19, 21, 15, 25…

•Décomposer un nombre sous forme de produits de deux ou plusieurs facteurs.

•Calculer mentalement un quotient et un reste entiers dans des cas simples de division d’un nombre entier par un nombre entier

•Évaluer l’ordre de grandeur d’un produit ou d’un quotient (sur les nombres entiers) par un calcul approché.

•Utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d’un nombre décimal par un nombre entier.

Les limites du calcul mental.

Il est parfois plus pertinent d'utiliser le calcul posé ou la calculatrice. Le calcul approché permet une anticipation du résultat et une vérification approximative.

Il faut donc mesurer l'efficience du calcul mental.

564 817 + 6789

567 x 10

126,98 : 4